



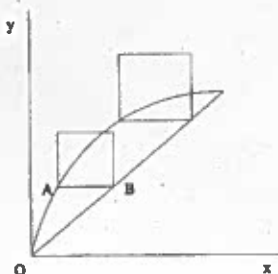
## Control 2

### P1. Calcule

- (2,0 pts.)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$  usando el cambio de variable  $u = \tan x$ .
- (2,0 pts.)  $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$ .
- (2,0 pts.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .

- P2. i) (3,0 pts.) Considere la región del primer cuadrante encerrada por la parábola  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$  y la recta  $y = x$ . El segmento  $AB$  de la figura se mueve paralelo al eje  $OX$  apoyando sus extremos  $A$  y  $B$  en la parábola y la recta respectivamente.

Encuentre el volumen del sólido que se genera al levantar cuadrados de la lado  $AB$  en cada posición de este segmento dentro de la región undicada.

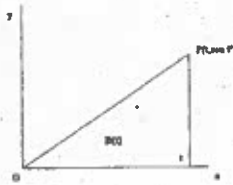
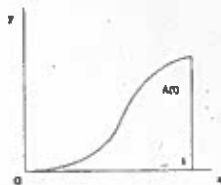


- ii) (3,0 pts.) Considere la región limitada por la curva  $y = \frac{1}{a}(x-2a)^2$  y el eje  $OX$  para  $x \in [2a, 3a]$ . Calcule los volúmenes de revolución generados por la rotación de esta región en torno al eje  $OX$  y al eje  $OY$ .

- P3. a) Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}$  que satisface la siguiente ecuación:  $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ . Se pide

- (2,0 pts.) Encontrar  $f(4)$ .
  - (2,0 pts.) Usando la continuidad de  $f$ , calcule  $f(0)$ .
- b) (2,0 pts.) En la figura se muestran dos regiones en el primer cuadrante:  $A(t)$  es el área bajo la curva de  $y = \sin(x^2)$  desde 0 hasta  $t$  y  $B(t)$  es el área del triángulo de vértices  $O$ ,  $P(t, \sin(t^2))$  y  $(t, 0)$ .

Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A(t)}{B(t)}$ .



Formulario:

$$A = \int_a^b h(x) dx, \quad V = \pi \int_a^b h^2(x) dx \quad \text{OX} \quad V = 2\pi \int_a^b xh(x) dx, \quad \text{OY} \quad V = \int_a^b A(x) dx$$

Justifique cada uno de sus pasos  
Tiempo: 3:00

# Calculus Diferencial e Integral - Control 2

## Penta Problema 1

i)  $\int \frac{dx}{\sec^2 x \cos^2 x}$  con  $u = \tan x$ ,  $du = \sec^2 x dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$   
 además  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x - 1}{1 + \tan^2 x}$

Sigue que  $\sec^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$

(10) Entonces  $\int \frac{dx}{\sec^2 x \cos^2 x} = \int \frac{du}{\frac{u^2}{1+u^2}} = \int \frac{1+u^2}{u^2} du = \int \left( \frac{1}{u^2} + 1 \right) du = -\frac{1}{u} + u = \tan x - \cot x$   
 (10) →

ii)  $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1-1) \arctan x}{(1+x^2)} dx = \int \arctan x dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

donde  $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

(10) Partes  $\begin{cases} u = \arctan x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$

Además  $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} (\arctan x)^2$

Sustituyendo  $t = \arctan x$ ,  $dt = \frac{dx}{1+x^2}$

(10) Entonces  $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$  puede interpretarse como una suma de Riemann

$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$  donde  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$   
 $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$   $\Rightarrow a=0, b=1$   
 $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

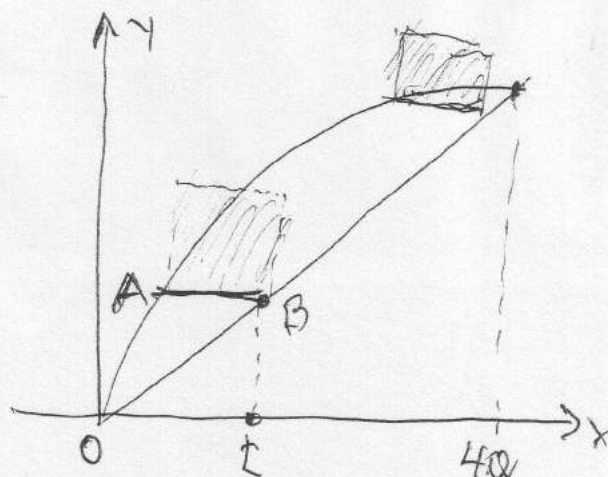
Así  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = -\frac{2x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}$

(10) Sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi^2}$

Partes  $u = x \rightarrow du = dx$   
 $dv = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx \rightarrow v = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) = \frac{4}{\pi^2}$

# Punto Problema 2

i)



Puntos de intersección de  $y^2 = 4ax$  y  $y = x$   
 $x^2 = 4ax \Rightarrow x = 0 \wedge x = 4a$

Para cualquier posición del tirzo AB  
 Supongamos  $x_B = t \Rightarrow y = x, y_B = t$

Como  $AB \parallel \text{eje } OX, y_A = y_B = t$

y como  $y_A^2 = 4ax_A \Rightarrow t^2 = 4ax_A$

(1.0) Sigue que  $x_B = t$  y  $x_A = \frac{t^2}{4a}$ , entonces  $\overline{AB} = x_B - x_A = t - \frac{t^2}{4a}$

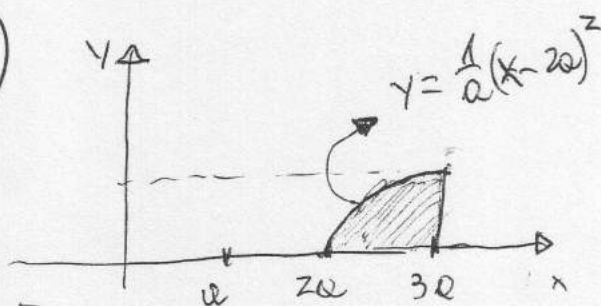
Así, el área de la sección cuadrada es  $\text{Area}(t) = \left(t - \frac{t^2}{4a}\right)^2$

$$\text{Entonces Volumen} = \int_0^{4a} \text{Area}(t) dt = \int_0^{4a} \left(t - \frac{t^2}{4a}\right)^2 dt = \int_0^{4a} \left[t^2 - \frac{t^3}{2a} + \frac{t^4}{16a^2}\right] dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3} t^3 + \frac{t^5}{5 \cdot 16a^2} - \frac{t^4}{4 \cdot 2a} \right]_0^{4a} = \frac{64}{3} a^3 + \frac{4^5 a^5}{5 \cdot 16 a^2} - \frac{4^4 a^4}{4 \cdot 2a} = 64a^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right]$$

(2.0) Así  $V = \frac{64}{30} a^3 = \frac{32}{15} a^3$

ii)



$$V_{OX} = \pi \int_{2a}^{3a} f(x) dx = \pi \int_{2a}^{3a} \frac{1}{a^2} (x-2a)^4 dx$$

$$= \frac{\pi}{a^2} \frac{(x-2a)^5}{5} \Big|_{2a}^{3a} = \frac{\pi a^5}{5a^2} = \frac{\pi}{5} a^3$$

$$V_{OY} = 2\pi \int_{2a}^{3a} x f(x) dx = 2\pi \int_{2a}^{3a} x \frac{1}{a^2} (x-2a)^2 dx = \frac{2\pi}{a^2} \int_{2a}^{3a} x(x-2a)^2 dx$$

Sustituim  
 $u = x - 2a$   
 $du = dx$

$$\Rightarrow V_{OY} = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a (u+2a) u^2 du = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a [u^3 + 2au^2] du = \frac{2\pi}{a^2} \left[ \frac{u^4}{4} + 2a \frac{u^3}{3} \right]_0^a$$

(2.0)  $\Rightarrow V_{OY} = \frac{2\pi}{a^2} a^4 \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{6} \pi a^3$



# Prueba Problema 3

a)  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$

i) Encontrar  $f(4)$ .

Derivando la ecuación y usando TFC.

(1.0)  $(x \sin(\pi x))' = \left( \int_0^{x^2} f(t) dt \right)' \Rightarrow \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x) = f(x^2) \cdot 2x$

Para obtener  $f(4)$ , basta en  $x=2$ , entonces

(1.0)  $\sin(2\pi) + 2\pi \cos(2\pi) = f(4) \cdot 4 \Rightarrow f(4) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ii) Como  $f$  es continua,  $x^2$  continuo,  $f(x^2)$  continuo en  $\mathbb{R}$

y en particular en  $x=0$ .

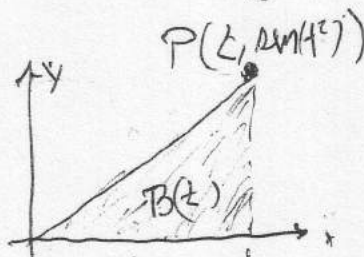
(1.0)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = f(0)$ , y del punto anterior

$$f(x^2) = \frac{\sin(\pi x)}{2x} + \frac{\pi \cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\pi}{2} \cos(\pi x)$$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\pi}{2} \cos(\pi x) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

(1.0) y por unicidad del límite:  $f(0) = \pi$

b)



(1.0) Es inmediato que  $A(t) = \int_0^t \sin(x^2) dx$  y  $B(t) = \frac{1}{2} t \sin(t^2)$  (Area  $\Delta$ )

Así  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{B(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \sin(x^2) dx}{\frac{1}{2} t \sin(t^2)} \stackrel{L'H}{=} 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{\sin(t^2) + 2t^2 \cos(t^2)} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{\frac{1}{2} t^2 + 2t^2 \cos(t^2)}$

(1.0)  $\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{B(t)} = \frac{2}{3}$  (OBS: También se puede resolver con más L'Hopital)